14 *Extensão e consistência de $\mathcal{L}$* ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Extensão

DEFINIÇÃO 1: Uma extensão de $\mathcal{L}$ é um sistema formal obtido pela alteração ou ampliação do conjunto de axiomas de $\mathcal{L}$ de tal modo que todos os teoremas de $\mathcal{L}$ continuam sendo teoremas deste novo sistema.

Obs.:

- Nada impede que novos teoremas possivelmente podem ser introduzidos.
- É possível que um sistema formal seja uma extensão de $\mathcal{L}$ mesmo embora não possua nenhum axioma em comum com $\mathcal{L}$.

Extensão e consistência

DEFINIÇÃO 2: Uma extensão de $\mathcal{L}$ é consistente se não existe fórmula A de $\mathcal{L}$ tal que ambas fórmulas A e $(\neg A)$ sejam teoremas dessa extensão.

Obs.: É claro que esta definição só faz sentido se o próprio sistema $\mathcal{L}$ for consistente.

Mas será que $\mathcal{L}$ é consistente?

Consistência de $\mathcal{L}$

TEOREMA 1: O sistema formal $\mathcal{L}$ é consistente.

Demonstração:

Suponha que $\mathcal{L}$ seja inconsistente.

Isto que dizer que existe uma fórmula A de $\mathcal{L}$ tal que tanto A quanto $\neg A$ são teoremas de $\mathcal{L}$.

Pelo teorema da corretude (vídeo 13), isto implica que A e $\neg A$ são tautologias, o que é impossível, já que se A é uma tautologia, então $\neg A$ é uma contradição. Portanto, $\mathcal{L}$ é consistente. ■

Consistência de uma extensão de $\mathcal{L}$

TEOREMA 2: Uma extensão $\mathcal{L}^1$ de $\mathcal{L}$ é consistente se, e somente se, existe uma fórmula que não é teorema de $\mathcal{L}^1$.

Demonstração (IDA):

Suponha que $\mathcal{L}^1$ seja consistente.

Então, para qualquer fórmula A, pelo menos umas duas fórmulas, a saber, A e $\neg A$, não é teorema de $\mathcal{L}^1$.

Consistência de uma extensão de $\mathcal{L}$

TEOREMA 2: Uma extensão $\mathcal{L}^1$ de $\mathcal{L}$ é consistente se, e somente se, existe uma fórmula que não é teorema de $\mathcal{L}^1$.

Demonstração (VOLTA): se existe uma fórmula que não é teorema de $\mathcal{L}^1$ então $\mathcal{L}^1$ é consistente.

Vamos mostrar que se $\mathcal{L}^1$ é inconsistente, então toda fórmula é teorema de $\mathcal{L}^1$.

Consistência de uma extensão de $\mathcal{L}$

TEOREMA 2: Uma extensão $\mathcal{L}^1$ de $\mathcal{L}$ é consistente se, e somente se, existe uma fórmula que não é teorema de $\mathcal{L}^1$.

Demonstração (VOLTA):

Seja A uma fórmula qualquer.

Se $\mathcal{L}^1$ é inconsistente, então deve existir uma fórmula B tal que $\vdash_{\mathcal{L}^1} B$ e $\vdash_{\mathcal{L}^1} (\neg B)$.

No vídeo 12, exemplo 2, vimos que $\vdash_{\mathcal{L}} \big(\neg B \to (B \to A)\big)$.

Como $\mathcal{L}^1$ é uma extensão de $\mathcal{L}$, devemos ter também $\vdash_{\mathcal{L}^1} \big(\neg B \to (B \to A)\big)$.

TEOREMA 2: Uma extensão $\mathcal{L}^1$ de $\mathcal{L}$ é consistente se, e somente se, existe uma fórmula que não é teorema de $\mathcal{L}^1$.

Demonstração (VOLTA):

Temos o seguinte:

$\vdash_{\mathcal{L}^1} B$ (fórmula i de sua prova)

$\vdash_{\mathcal{L}^1} (\neg B)$ (fórmula j de sua prova)

$\vdash_{\mathcal{L}^1} \big(\neg B \to (B \to A)\big)$ (fórmula k de sua prova)

Aplicando MP em j, k obtemos $(B \to A)$ (fórmula $k + 1$) e aplicando novamente MP em $i, k + 1$, obtemos A.

Como A é arbitrária, concluímos que se $\mathcal{L}^1$ é inconsistente, então qualquer fórmula é teorema de $\mathcal{L}^1$. ■

Observações finais

Em um sistema que é uma extensão inconsistente de $\mathcal{L}$, qualquer fórmula é um teorema.

Este fato é por vezes chamado princípio da explosão e o sistema inconsistente em questão é dito *trivial*.

Existem outros sistemas para lógicas não clássicas que podem ser inconsistentes mas não triviais.

Lógica Matemática

14 *Extensão e consistência de $\mathcal{L}$* ■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br